

20/03/2018

Επίπεδο

Είδαμε ότι ένα επίπεδο που διέρχεται από σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι εφαιρόμενο στα διάντια $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1$$

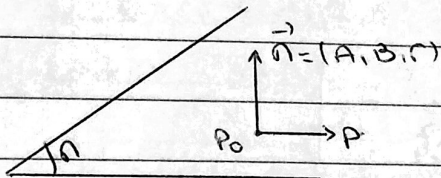
$$\bullet \quad y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2$$

$$\bullet \quad z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3$$

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

όπου $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο με αναλυτική εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$ όπου $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$



Θεωρούμε ένα σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.
Εάν $P(x, y, z)$ είναι τυχαίο σημείο του π
τότε,
$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{n}, \vec{P_0P} \rangle = 0$$

Έχουμε αποδείξει την εξής πρόταση:

Πρόταση:

Εάν π είναι επίπεδο με αναλ. εξίσωση $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ με $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, τότε το διάντιο $\vec{n} = (A, B, C)$ είναι κάθετο του επιπέδου.

Εάν δίνεται σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και $\vec{n} = (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, μπορούμε να βρούμε το επίπεδο που διέρχεται από το P_0 και είναι κάθετο στο $\vec{n}$. Το επίπεδο αυτό έχει εξίσωση:

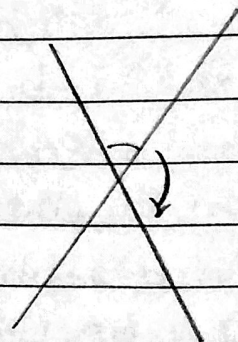
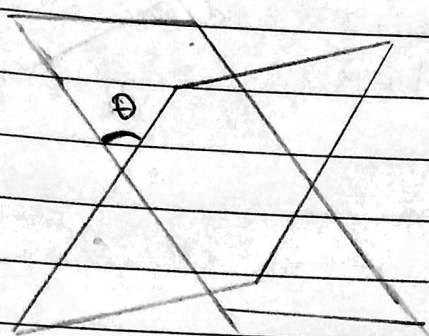
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Γωνία δύο επιπέδων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 2 επίπεδα:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Lambda_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Lambda_2 = 0.$$



Τότε τα επίπεδα π_1 και π_2 σχηματίζουν δύο πλευρές παραλληλωγραιοειδών γωνιών εκτός αν είναι παράλληλα υπό την ευρεία έννοια (δηλ. μπορεί και να ωφιστηθούν).

Ονομάζουμε γωνία των επιπέδων π_1 και π_2 την μικρότερη διεδρόν γωνία.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η γωνία θ των π_1 και π_2 δίνεται από τον τύπο:

$$\cos \theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$

Παρατήρηση:

Το κάθετο του π_1 είναι το $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1)$, το κάθετο του π_2 είναι το $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2)$. Άρα διαπιστώνουμε ότι η γωνία θ των δύο επιπέδων είναι:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

δηλαδή ισχύει με την γωνία που σχηματίζουν οι διευθετήσεις των $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$.

Συμπέρασμα:

① Τα π_1 και π_2 είναι κάθετα αν-ν:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + \Gamma_1 \Gamma_2 = 0$$

② Τα π_1 και π_2 παράλληλα όταν $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ ή ισοδύναμα, αν-ν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$$

όταν η αναλογία παίρνεται με την προϋπόθεση ότι ένας παρανομοκωστής είναι μηδέν.

Για π.χ. τα επίπεδα: $2x + 4y + z + 8 = 0$

και $4x + 8y + 2z + 5 = 0$, είναι $\parallel$.

③ Για να ταυτίζονται δυο επίπεδα πρέπει να είναι παράλληλα και επιπλέον αν έχουν κοινό σημείο. Αυτό συμβαίνει αν-ν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

Ειδικές μορφές της εξίσωσης των επιπέδων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα επίπεδο με αναλυτική εξίσωση $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$, $(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$

1.) $\Delta = 0$: $Ax + By + \Gamma z = 0$ και παρατηρούμε ότι ενοκληθίζεται από το $(0, 0, 0)$. Άρα όταν δίνει ο σταθ. το επίπεδο διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2.) $A \cdot B \cdot \Gamma \neq 0$ τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{x}{-(\frac{\Delta}{A})} + \frac{y}{-(\frac{\Delta}{B})} + \frac{z}{-(\frac{\Delta}{\Gamma})} = 1$$

παρατηρούμε ότι τα σημεία $P_1(-\frac{\Delta}{A}, 0, 0)$, $P_2(0, -\frac{\Delta}{B}, 0)$,

$P_3(0, 0, -\frac{\Delta}{\Gamma})$ ανήκουν στο επίπεδο και είναι τούτες του επιπέδου με τους άξονες.

3.) $A=B=0$ τότε $\Gamma \neq 0$ και $z = -\frac{\Delta}{\Gamma}$
 είναι επίπεδο παρὰ το Oxy επίπεδο που διέρχεται
 από το $- \Delta/\Gamma$.

4.) Ομοίως βεβαιώνουμε αν $(A=\Gamma=0)$ ή $(B=\Gamma=0)$.

5.) $\Gamma=0$, $A \cdot B \neq 0$ τότε έχουμε την εξίσωση $Ax + By + \Delta = 0$
 Σε αυτήν την περίπτωση το επίπεδο έχει ρόδιο το $\vec{n} = (A, B, 0)$

Επομένως $\langle \vec{n}, \vec{e}_3 \rangle = 0$ όπου $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

Άρα ο άξονας Oz είναι παρὰ το επίπεδο

Άσκηση Να προσδιοριστεί το γνήσιο βέτο

$$\left(\begin{array}{l} A=0, B \cdot \Gamma \neq 0 \\ \text{και } B=0, A \cdot \Gamma \neq 0 \end{array} \right)$$

Απόσταση βήμιο από επίπεδο.

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο π , με αναλ. εξίσωση
 $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$, όπου $(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$

Έστω $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ένα βήμιο εκτός επιπέδου.

Επειδή το P_1

είναι εκτός επιπέδου

$$Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta \neq 0.$$

Ας υποθέσουμε με

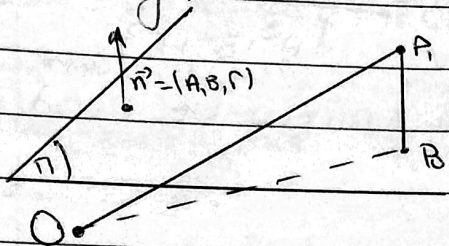
$P_0(x_0, y_0, z_0)$ την προβολή του P_1 στο επίπεδο. Απαιτείται
 θα έχουμε ότι: $Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta = 0$

Ορισμός: Ορίζουμε ως απόσταση του P_1 από το π τον αριθμό
 $d(P_1, \pi) = \|P_0 - P_1\|$

Παρατήρηση: Η απόσταση του $P_1(x_1, y_1, z_1)$ από το π με αναλ. εξίσωση η $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(p, \pi) = \frac{\|Ax_1 + By_1 + \Gamma_2 + \Delta\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Αποδείξη:



θεωρούμε ότι $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι
 η προβολή του P_1 στο επίπεδο π .
 τότε το $\vec{P_0P_1} \parallel \vec{n}$

Άρα η γωνία θ των διατετων $\rho\sigma\rho$ και $\tilde{\eta}$ $\circ$ $\tilde{\eta}$ π . Τότε:

$$|\langle \vec{P}_0 \vec{P}_1, \vec{n} \rangle| = \|\vec{P}_0 \vec{P}_1\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos \theta$$

Amo enu tedeutaia iborita, exaure

$$d(P, n) = \|P_0 - P_n\|$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + r^2}$$

$$= \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (A, B, r)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + r^2}}$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + r_1 - Ax_0 - By_0 - r_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + r^2}}$$

Επειδή $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$

Ad

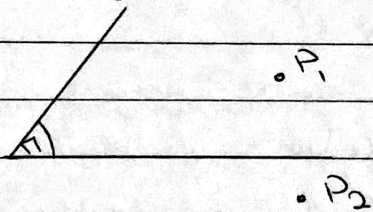
$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cx_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Παραδειγμα: Να βρεθεί η απόσταση του $O(0,0,0)$ από το επίπεδο $\pi: 2x+3y+z-7=0$

$$\text{Έχουμε, } d(O,\pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 - 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

Ορισμός Ο αριθμός $f(x,y,z) = \frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, λέγεται προβλημένη απόσταση των σημείων $P_i(x,y,z)$ από το επίπεδο με αναδ. εξ. $Ax+By+Cz+D=0$

Θα δείξουμε ότι το σημείο P_i βρίσκεται στον θετικό ημίσωο του $Ax+By+Cz+D=0$, αν $f(x,y,z) > 0$ και ότι το P_i βρίσκεται στον αρνητικό ημίσωο του $Ax+By+Cz+D=0$ αν $f(x,y,z) < 0$



Παρατήρηση:

Οι εξισώσεις $Ax+By+Cz+D=0$ και $-Ax-By-Cz-D=0$ ορίζουν το ίδιο επίπεδο. Έτσι ο θετικός ημίσωος του ενός είναι αρνητικός ημίσωος για το άλλο επίπεδο

Παρατήρηση:

Θετικός ημίσωος του επιπέδου $Ax+By+Cz+D=0$ είναι εκείνο που περιέχει το πέρος του διανύσματος $\vec{n}=(A,B,C)$ όταν το τοποθετούμε να έχει αρχή σε ένα σημείο του επιπέδου

Εφαρμογή 1.)

Θεωρούμε δύο επιπέδα :

$$\pi_1: A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Pi = 0$$

τα οποία δεν είναι παράλληλα ούτε συμπίπτουν

Θέλουμε να βρούμε τις εξισώσεις των επιπέδων που δι-
χοτομούν τις διεδρές γωνίες. Θεωρούμε προβ/να $\vec{n}_1$ κ' $\vec{n}_2$
των επιπέδων. Αν $P(x, y, z) \in \pi_3$, τότε το P θα ικανοποιεί
από P_1 και P_2 , Αφ

$$\frac{-A_1x - B_1y - \Gamma_1z - \Delta_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$

Επίσης, αν $P(x, y, z) \in \pi_4$, τότε :

$$\frac{A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$